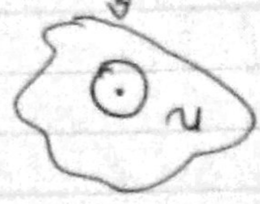
29/10/18

<u>Τοπολογικές έννοιες:</u> $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό ή κλειστό δηλ. $\mathbb{R}^n \setminus U$ ανοικτό [και <u>όχι</u> U μη ανοικτό]



Εκτός των $\emptyset, \mathbb{R}^n$ που είναι και ανοικτά και κλειστά, όλα τα άλλα $\emptyset \neq U \subsetneq \mathbb{R}^n$ δεν μπορεί να είναι και ανοικτά και κλειστά (χωρίς απόδειξη)

<u>Παράδειγμα:</u> Ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό, κλειστή μπάλα είναι κλειστό.

Σφαίρα;

$$\bar{B}(\bar{x}, r) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y} - \bar{x}\| \leq r\}$$
$$B(\bar{x}, r) = \{ \dots\dots\dots < x\}$$
$$\partial B(\bar{x}, r) = \{ \dots\dots\dots = \} =$$
$$= \bar{B}(\bar{x}, r) \cap \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y} - \bar{x}\| \geq r\} =$$
$$\mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}, r)$$

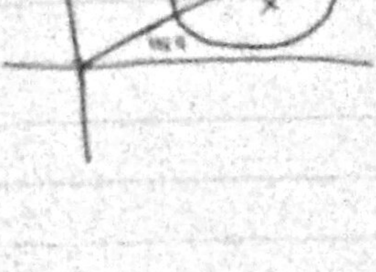
κλειστό ως τομή κλειστών

<u>Ορισμός:</u> Ένα υποσύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται <u>φραγμένο</u>, αν $(\exists c > 0)(\forall \bar{x} \in U): \|\bar{x}\| < c$

$$U \subset B(\bar{0}, c)$$

και <u>συμπαγές</u>, αν είναι κλειστό και φραγμένο

<u>Π.χ.</u> • $\bar{B}(\bar{x}, r)$ συμπαγές, αφού κλειστό και φραγμένο



αφού $\bar{B}(\bar{x}, r) \subset \bar{B}(0, r + \|\bar{x}\|)$ (*)

(*) $\forall \bar{y} \in \bar{B}(\bar{x}, r)$ ΘΔΟ $\bar{y} \in \bar{B}(0, r + \|\bar{x}\|)$
$\Leftrightarrow \|\bar{y}\| \leq r + \|\bar{x}\|$

$(\|\bar{y}\| \leq \|\bar{x} - \bar{y}\| + \|\bar{x}\| \leq r + \|\bar{x}\|$

<u>Ορισμός</u> Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ (όχι κατ' ανάγκη ανοιχτό το U). Ένα σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται <u>εσωτερικό σημείο</u> του U αν $(\exists \varepsilon > 0): B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$. <u>Εξωτερικό σημείο</u> του U αν είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}^n \setminus U$. <u>Συνοριακό σημείο</u> αν δεν είναι ούτε εσωτερικό ούτε εξωτερικό.

<u>Παρατήρηση</u> Σύνολο εσωτερικών σημείων του U
$= \operatorname{int} U = \mathring{U}$
Σύνολο εξωτερικών σημείων του U
$= \operatorname{ext} U = \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus U)$
Σύνολο συνοριακών σημείων
$= \partial U = \operatorname{bd} U$

<u>Παρατήρηση</u>: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε
$$\mathbb{R}^n = \underbrace{(\operatorname{int} U)}_{=\mathring{U}} \cup (\operatorname{ext} U) \cup \underbrace{(\operatorname{bd} U)}_{\partial U}$$
και τα σύνολα αυτά είναι ξένα μεταξύ τους

<u>Παραδείγματα</u>: (α) $U = \emptyset \Rightarrow \operatorname{int} U = \emptyset$, $\operatorname{ext} U = \mathbb{R}^n$, $\partial U = \emptyset$

(β) $U = \mathbb{R}^n \Rightarrow \operatorname{int} U = \mathbb{R}^n$, $\operatorname{ext} U = \emptyset$, $\partial U = \emptyset$

(γ) $U = \bar{B}(\bar{x}, r) \Rightarrow$ Άσκηση

(δ) $U = B(\bar{x}, r) \Rightarrow$ -//-

(ε) $U = \partial B(\bar{x}, r) \Rightarrow$ -//-

Πρόταση: (Ιδιότητες του $\mathrm{int}\,U$)

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ τότε:

a) $\mathrm{int}\, U \subset U$ $[\bar{x} \in \mathrm{int}\, U \overset{\text{ορ}}{\iff} \exists\, \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U \Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{x} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U]$

b) $\mathrm{int}\, U$: ανοιχτό [Έστω $\bar{x} \in \mathrm{int}\, U$. ΘΔΟ
$(\exists\, \varepsilon > 0 : \underbrace{B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathrm{int}\, U}$
$\iff \forall\, \bar{y}$ με $\|\bar{y} - \bar{x}\| < \varepsilon$
$\bar{y} \in \mathrm{int}\, U$

γ) U: ανοιχτό $\iff \mathrm{int}\, U = U$

δ) $U \subset V \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathrm{int}\, U \subset \mathrm{int}\, V$

ε) $\mathrm{ext}\, U \overset{\text{ορ}}{=} \mathrm{int}(\mathbb{R}^n \setminus U) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus U$ [(a)]

Έχουμε: $\exists\, r > 0,\ B(\bar{x}, r) \subset U \Rightarrow \forall\, \bar{y} \in \overset{\circ}{B}(\bar{x}, r)$:
$\exists\, \tilde{\varepsilon} > 0 : B(\bar{y}, \tilde{\varepsilon}) \subset B(\bar{x}, r)$
$\Rightarrow \bar{y} \in B(\bar{x}, r)$, $\bar{y} \in \mathrm{int}\, U \Rightarrow B(\bar{x}, r) \subset \mathrm{int}\, U$

Απόδειξη:

(γ) "$\Leftarrow$" Αν $\mathrm{int}\, U = U$, αφού $\mathrm{int}\, U$ ανοιχτό, τότε U: ανοιχτό

"$\Rightarrow$" Έστω U ανοιχτό $\overset{\text{ορ}}{\Rightarrow} \forall\, \bar{x} \in U : \exists\, \underbrace{B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U}$

$\iff \underbrace{\bar{x} \in \mathrm{int}\, U}$
$\iff U \in \mathrm{int}\, U$
$\underset{(a)}{\iff} U = \mathrm{int}\, U$

(δ) $\bar{x} \in \mathrm{int}\, U \overset{\text{ορ}}{\Rightarrow} \exists\, \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U \subset V$
$B(\bar{x}, \varepsilon) \subset V$

$\bar{x} \in \mathrm{int}\, V$

Ορισμός: Έστω $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Η τομή όλων των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν το $\mathcal{U}$, δηλ:

$$\bar{\mathcal{U}} := \bigcap_{k \in K} k \quad , K = \{ k \subset \mathbb{R}^n ,\ k: \text{κλειστό και } \mathcal{U} \subset K \}$$

Πρόταση: Έστω $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Τότε:

α) $\mathcal{U} \subset \bar{\mathcal{U}}$

β) $\bar{\mathcal{U}}$ κλειστό

γ) $\mathcal{U} \subset K^{(1)} \subset \mathbb{R}^n$ και $K^{(1)}$ κλειστό $\Rightarrow \bar{\mathcal{U}} \subset K^{(1)}$

δ) $\mathcal{U}$: κλειστό $\Leftrightarrow \mathcal{U} = \bar{\mathcal{U}}$

Απόδειξη: (β) Η τομή (οσοδήποτε πολλών) κλειστών

(α) Έστω $\bar{x} \in \mathcal{U} \Rightarrow \bar{x} \in k,\ \forall k \supset \mathcal{U}$

$\Rightarrow \bar{x} \in k,\ \forall k \supset \mathcal{U},\ k$: κλειστό

$\Rightarrow \bar{x} \in \underbrace{\bigcap k}_{\bar{\mathcal{U}}},\ k \supset \mathcal{U},\ k$: κλειστό

(γ) $\bar{\mathcal{U}} = \bigcap_{\{ x \supset \mathcal{U},\ k: \text{κλειστό} \} = K} k$

Αφού $L \in K$: $\underbrace{\bigcap_{k \in K} k}_{= \bar{\mathcal{U}}} \subset L$

$\bar{x} \in \bigcap_{k \in K} K \Rightarrow \bar{x} \in k \ \forall k \in K \Rightarrow \bar{x} \in L$, $L \in K$

(δ) "$\Rightarrow$": $\mathcal{U} \subset L$ και $\mathcal{U}$: κλειστό $\Rightarrow \bar{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ (α) $\mathcal{U} = \bar{\mathcal{U}}$

"$\Leftarrow$": $\mathcal{U} = \bar{\mathcal{U}}$ κλειστό $\Rightarrow \mathcal{U}$ κλειστό

Παρατήρηση: Τα (α), (β), (γ) όλα μαζί λένε:
Η κλειστή θήκη $\bar{U}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το U

Ορισμός: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Ένα $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, λέγεται:

① μεμονωμένο σημείο του U
αν $(\exists\, \varepsilon > 0)$ $U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) = \{\bar{x}\}$

② σημείο συσσώρευσης του U
αν $(\forall \varepsilon > 0)$: $U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} = \emptyset$

③ σημείο επαφής του U
αν $\bar{x} \in U$ ή $\bar{x}$: σημείο συσσώρευσης

σύνολο σημείων συσσώρευσης του U
= παράγωγο σύνολο $= U'$

Άσκηση: Δ.Ο

(α) $\bar{x}$: μεμονωμένο σημείο του $U \Rightarrow \bar{x} \in U \cap \partial U$
(β) $\bar{x} \in U \Rightarrow$ ή $\bar{x}$ μεμον. σημείο ή $\bar{x}$ σημείο συσσώρευσης

(γ) $\mathrm{int}\, U \subset U'$
(δ) $\mathrm{ext}\, U \subset \mathbb{R}^n \setminus U'$